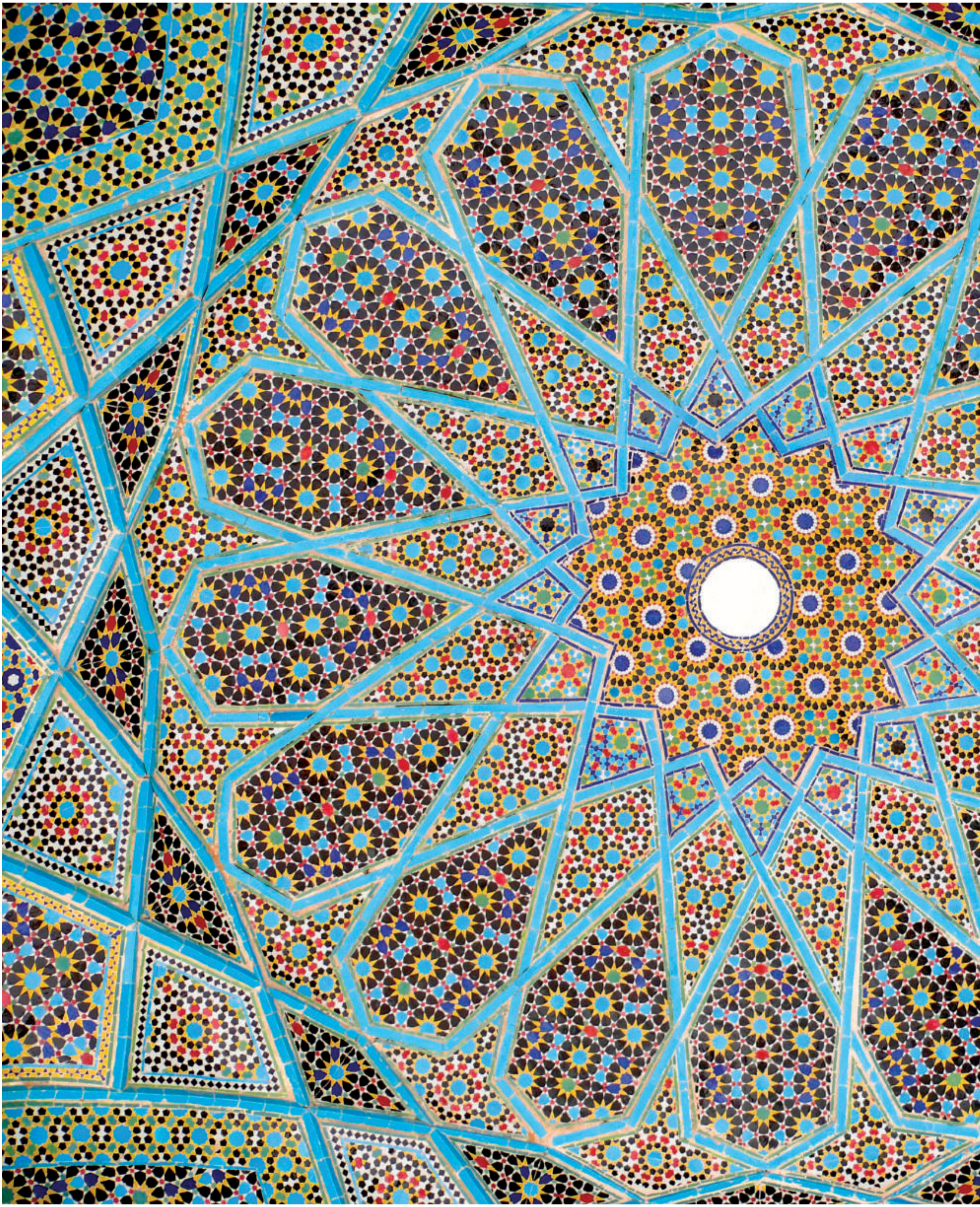
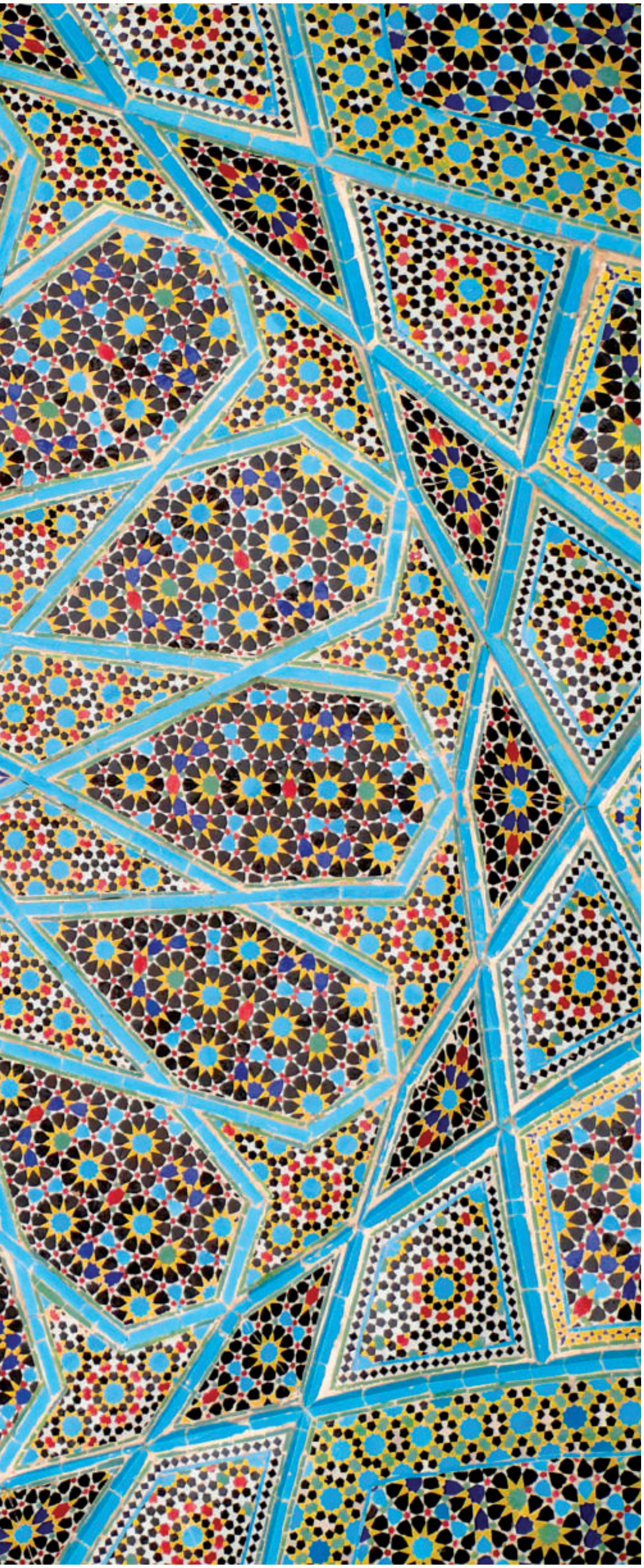




Formes mathématiques

De l'art de couper les carrés en trois

La question que nous allons aborder dans cet article – et dans un second qui paraîtra dans le prochain numéro de la revue – fait partie des problèmes pouvant être compris par les plus jeunes enfants, tout en ayant le pouvoir de priver les mathématiciens les plus têtus de quelques nuits de sommeil ! C'est ce qui la rend si intrigante... Papier, crayon, règle, compas, ciseaux, vous voilà parfaitement équipé pour découper un carré en plusieurs carrés identiques.

PAR **CHRISTIAN BLANVILLAIN**, INGÉNIEUR INFORMATICIEN DIPLÔMÉ DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

L'art du zellige – pavages de Girih. Plafond du mausolée du poète perse Hafiz de Shiraz (XIVe siècle) en Iran. © Pentocelo / Wikimedia.

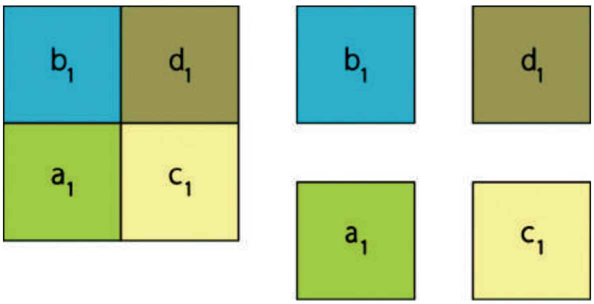


Figure 1. Découper un carré en quatre carrés identiques.
© C. Blanvillain.

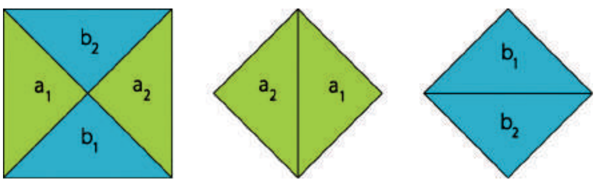


Figure 2. Découper un carré en deux carrés identiques avec quatre pièces. © C. Blanvillain.

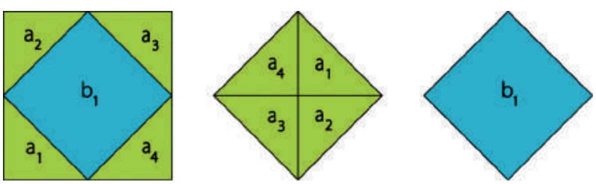


Figure 3. Découper un carré en deux carrés identiques avec cinq pièces. © C. Blanvillain.

Comment diviseriez-vous un carré en quatre carrés identiques ? C'est simple : il suffit de tracer une croix dont les deux segments relient les milieux des côtés opposés du carré (fig. 1).
Et comment découperiez-vous un carré en deux carrés identiques ? Impossible ? Pas si vous vous autorisez à le subdiviser en plusieurs petits morceaux, de tailles et de formes non forcément égales qui, correctement réassemblés, constitueront deux carrés semblables. Vous n'avez pas encore trouvé ? Cherchez bien...
Un indice : il existe deux solutions simples qui scindent le carré soit en quatre, soit en cinq morceaux. Dans la solution à quatre morceaux, chacun des petits carrés finaux utilise deux pièces. Dans la solution à cinq morceaux, un petit carré final est entier et l'autre est constitué de quatre pièces.
Vous n'avez toujours pas trouvé ? Alors voici les deux solutions. Pour la première, tracez les deux diagonales du carré. En assemblant deux à deux les triangles rectangles isocèles obtenus le long de leur grand côté, nous obtenons bel et bien deux carrés identiques (fig. 2).
Pour la seconde, il suffit d'extraire un petit carré dont les sommets sont les milieux des côtés du carré de départ. Il ne reste plus qu'à assembler les quatre triangles des quatre coins du grand carré, le long de leurs petits côtés, pour obtenir le deuxième petit carré (fig. 3). De ces deux solutions, on préférera la première car elle utilise un nombre minimal de morceaux.
Passons maintenant au problème qui nous préoccupe dans cet article. Comment découperiez-vous un carré en trois carrés de même surface et en un nombre minimal de morceaux ? Nous vous recommandons très fortement de réfléchir à ce problème avant de vous précipiter sur les solutions qui suivent. Arrêtez de lire cet article et prenez votre temps pour chercher. Si d'aventure vos nuits s'en trouvaient écourtées, alors vous n'aurez qu'à reprendre votre lecture ici... Vous l'aurez compris, la dissection d'un carré en trois carrés identiques, contrairement à celle en deux ou en quatre, est un problème difficile.

ORIGINE DU PROBLÈME

Ce problème de géométrie remonte à l'âge d'or de la civilisation islamique et du monde arabo-musulman.

Il a été posé par les artisans qui maîtrisaient l'art du zellige, un composant caractéristique de l'architecture islamique. Le zellige, dont vous voyez un exemple sur l'image placée au début de cet article, est un carreau d'argile émaillée dont l'assemblage produit de somptueuses mosaïques aux motifs géométriques complexes.

Dans son manuscrit *Constructions géométriques à l'usage des artisans*, le mathématicien perse Abu'l-Wafa' (940-998) décrit quelques-unes des réunions qui avaient lieu à Samarcande (Ouzbékistan), entre géomètres et artisans, pour travailler sur des constructions géométriques ou sur la conception de nouveaux motifs ornementaux. Les géomètres donnaient des conseils théoriques aux artisans et ces derniers leur expliquaient ce qui était réalisable ou pas en pratique. Lors de l'une de ces rencontres, les artisans demandèrent aux mathématiciens comment construire un carré par assemblage de trois carrés identiques, puis leur montrèrent la méthode qu'ils utilisaient alors : une dissection en six morceaux, qui leur semblait minimale en nombre de pièces mais qui, hélas, n'était pas correcte.

Ces artisans n'avaient pas tous une culture mathématique très poussée. Certains ne connaissaient pas le théorème de Pythagore. Et pourtant, l'erreur qu'ils commettaient était de l'ordre de l'épaisseur d'une lame de scie ou d'un trait de crayon seulement ! Même si certains réalisaient que cette dissection était fausse, quelle autre pouvaient-ils utiliser à la place ? C'est ainsi qu'Abu'l-Wafa' se pencha sur ce problème et leur proposa un superbe morcellement en neuf pièces (fig. 4) qu'il présente dans son chapitre *Comment diviser et assembler les carrés entre eux*.

Vous savez maintenant comment découper un carré en trois carrés identiques. (Si le seul dessin de la figure 4 ne vous convainc pas, lisez l'encadré *Derrière la trisection d'Abu'l-Wafa'*). Il vous faut actuellement neuf pièces. Saurez-vous trouver une solution en utilisant moins ?

LES TRISECTIONS DU CARRÉ AU FIL DE L'HISTOIRE

Pendant 400 ans environ, la trisection d'Abu'l-Wafa' est restée l'unique trisection du carré connue. Il faut attendre le XIVe siècle pour que le mathématicien Abu Bakr al-Khalil propose deux nouvelles solutions : l'une utilisant neuf pièces (fig. 5a) et l'autre seulement huit (fig. 5b). Sur la figure 5a, le petit carré central jaune c_1 fait un angle de 30° avec le grand carré. Sur la figure 5b, la grande ligne de coupe, qui sépare le carré en deux, passe par le centre du carré et a également un angle de 30°.

Au XVIIIe siècle, les mathématiciens français Jacques Ozanam (1640-1717) et Jean-Étienne Montucla (1725-1799) se penchèrent à nouveau sur ce problème. On trouve, dans l'édition de 1778 de leur ouvrage *Récréations mathématiques et physiques*, une méthode générale de transformation d'un rectangle quelconque en un carré de même surface. Appliquée à trois petits carrés identiques collés les uns aux autres, cette approche donne des solutions utilisant huit morceaux.

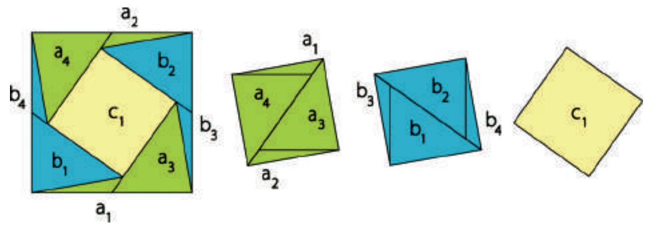
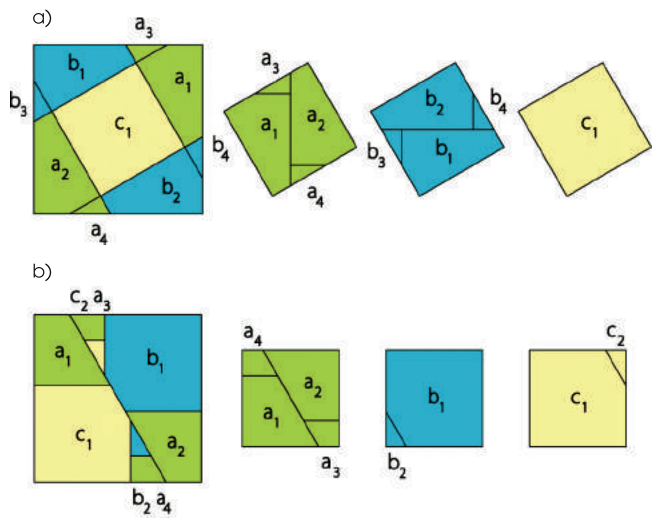


Figure 4. Trisection en neuf pièces d'Abu'l-Wafa' (Xe siècle). © C. Blanvillain.



Figures 5a et 5b. Trisection en neuf et huit pièces d'Abu Bakr al-Khalil (XIVe siècle). © C. Blanvillain.

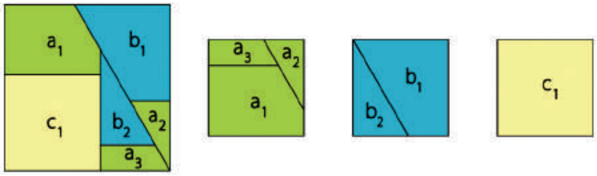
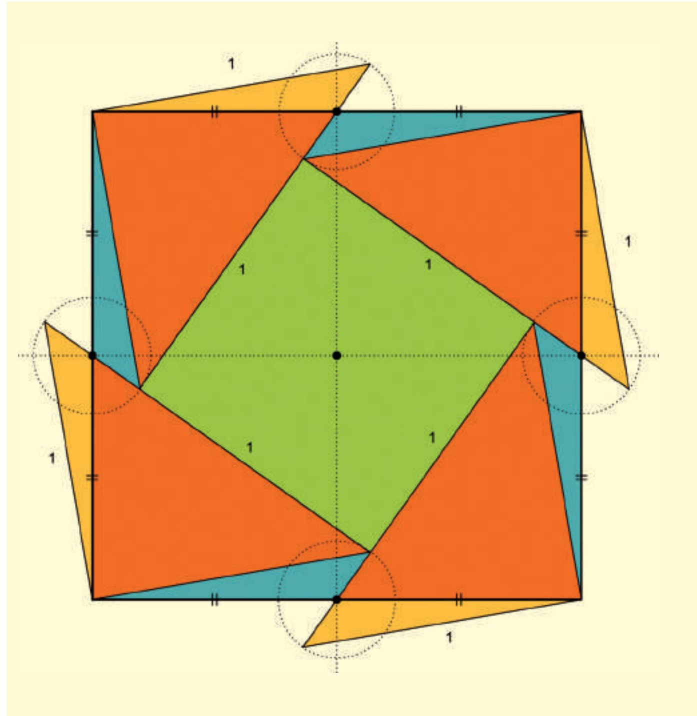
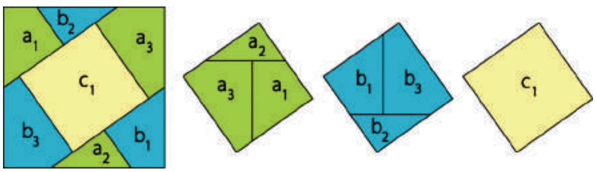


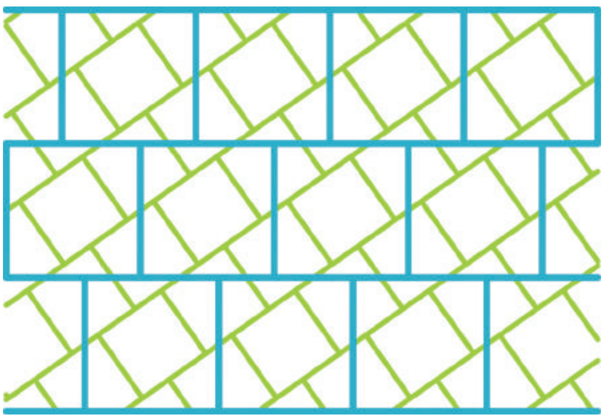
Figure 6. Trisection en six pièces de Perigal (1891). © C. Blanvillain.



a)



b)



Figures 7a et 7b. Trisection en sept pièces de Frederickson (2002) qui a l'étonnante propriété de paver le plan. © C. Blanvillain.

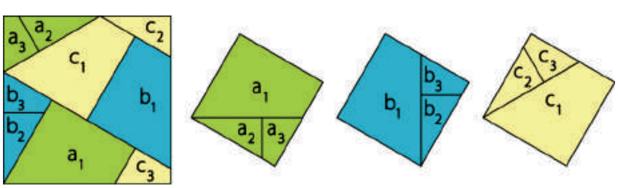


Figure 8. Trisection en trois fois trois pièces identiques de Yoshigahara (2004). © C. Blanvillain.

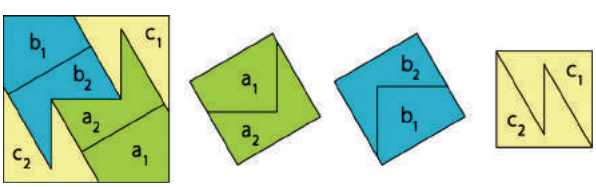


Figure 9. Trisection en six pièces de même surface de Blanvillain (2010). © C. Blanvillain.

Il faut attendre encore 1891 pour que Henry Perigal (1801-1898) publie une solution supposée minimale, utilisant six morceaux seulement (fig. 6) et très similaire à la solution en huit pièces d'Abu Bakr al-Khalil (fig. 5b). Ici, la ligne de coupe, qui sépare le grand carré en deux, ne passe plus par le centre du carré : elle est légèrement décalée vers la droite par rapport à la figure 5b, mais conserve un angle de 30° par rapport au grand carré.

UN PROBLÈME TOUJOURS D'ACTUALITÉ

De nos jours, de nouvelles trisections sont encore découvertes. Ainsi Greg N. Frederickson propose, en 2002, une nouvelle solution en sept pièces, qui a des propriétés intéressantes (fig. 7a). D'une part, elle est symétrique : les pièces de type a sont identiques aux pièces de type b. D'autre part, elle pave le plan (fig. 7b) : si vous placez régulièrement les trisections les unes à côté des autres selon un pavage carré (en bleu), le découpage des pièces forme un deuxième pavage avec des carrés (en vert) plus petits et orientés dans

Derrière la trisection d'Abu'l-Wafa'

Voici comment procéder à la trisection du carré selon Abu'l-Wafa'. Partons à l'envers en essayant de construire un grand carré avec trois petits carrés. Pour cela, découpons deux de ces petits carrés le long de l'une de leurs diagonales, puis assemblons les quatre demi-carrés obtenus (en orange foncé et orange clair) autour du troisième petit carré (en vert), comme indiqué sur la figure ci-contre. En reliant les quatre angles droits des demi-carrés, nous pouvons tracer le grand carré dont nous cherchons à faire la trisection.

On peut démontrer alors que chaque triangle bleu (manquant) est le symétrique d'un triangle orange clair (qui dépasse) par une symétrie centrée en un milieu d'un côté du grand carré. Cela permet de « rabattre » les morceaux des quatre demi-carrés qui étaient à l'extérieur du grand carré (sur la figure, les traits en pointillés passent par les milieux des côtés du grand carré).

Notons que si l'on assemble les quatre demi-carrés en un seul carré, comme nous l'avons fait sur la figure 2, on obtient un carré dont la surface est le double des carrés d'origine. Ainsi, cette dissection nous permet de voir par assemblage que la somme des aires de deux carrés de tailles différentes peut être égale à l'aire d'un troisième carré. Cela ne vous rappelle-t-il rien ? Abu'l-Wafa' avait constaté que sa dissection fonctionnait pour deux carrés de surfaces quelconques et donc qu'elle pouvait être utilisée pour expliquer le théorème de Pythagore aux artisans ! C'est ce que nous verrons dans le prochain article.

Pour comprendre la trisection d'Abu'l-Wafa'.
© C. Blanvillain.

une autre direction que le premier. Remarquez qu'en déplaçant l'un des deux maillages bleu ou vert sur la figure 7b (sans le tourner), vous trouverez une infinité de solutions à la trisection du carré !

Nobuyuki Yoshigahara (1936-2004) publie en 2004 une solution extraordinaire en neuf pièces, où chacun des trois carrés finaux a la même coupe (fig. 8) ! En « collant » a_2 et a_3, ainsi que b_2 et b_3, nous obtenons une solution en seulement sept pièces, mais qui n'a plus la même propriété. Remarquez que la trisection de Frederickson (fig. 7a) peut acquérir également cette caractéristique : en effet, il suffit de diviser le carré c_1 de la même manière que les carrés a et b. Sur la figure 8, les angles des pièces par rapport au grand carré sont tous des multiples de 30°.

En 2010, Christian Blanvillain (auteur du présent article) et János Pach publient une nouvelle famille de solutions symétriques en seulement six morceaux (fig. 9). Cette solution permet d'en obtenir une infinité d'autres par glissement de la frontière entre a_1 et a_2 ou de celle entre b_1 et b_2. La position présentée sur la figure 9 se caractérise par six pièces ayant toutes exactement la même surface. Ici aussi, les angles des pièces par rapport au grand carré sont tous des multiples de 30° et les pièces vertes et bleues se rejoignent précisément au milieu du grand carré.

Toutes les solutions connues ne sont pas présentées ici : nous avons sélectionné les plus importantes d'un point de vue historique et les plus élégantes d'un point de vue géométrique. D'autre part, il n'a toujours pas été démontré qu'il était impossible de découper un carré en trois carrés identiques avec moins de six pièces. Oserez-vous vous lancer dans la recherche d'une telle solution ? Dans le prochain article de la rubrique *Formes mathématiques*, nous verrons comment découper un carré en cinq. Cela vous laisse un peu de temps pour y réfléchir… **C. B.**

Pour en savoir plus

> http://fr.wikipedia.org/wiki/Trisection_du_carré
> http://QuCub.com/history_fr